

Esercitaz. sul calcolo degli integrali - Integrazione di funz. razionali fratte.

Integrazione per decomposizione in somma.

Consiste nel decomporre la funzione integranda nella somma di funzioni che sappiamo integrare.

$$\text{Es. 1)} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctan x + c$$

$$2) \int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \int 1 - \int \frac{1}{x+1} = x - \log|x+1| + c$$

$$3) \int \frac{x^2}{x^2+5} dx = \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5} dx = \int 1 - 5 \int \frac{1}{x^2+5}$$

$$= x - 5 \left(\int \frac{1}{x^2+5} \right) ?$$

$$\int \frac{1}{x^2+5} dx = \int \frac{1}{5(x^2+1)} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+5} dx = \int \frac{1}{5\left(\frac{x^2}{5}+1\right)} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx$$

Voglio riconoscerlo alla
 forma $\int \frac{1}{[f(x)]^2+1} \cdot \underbrace{f'(x)} dx$

$$= \left(\frac{1 \cdot \sqrt{5}}{5} \right) \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c$$

Abbiamo ottenuto
che:

$$\int \frac{1}{x^2+5} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c$$

In generale, vale la seguente:

$$\boxed{a>0}: \int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) + c$$

Integrazione di funzioni razionali fratte.

Trahhiamo, ora, il caso del denominatore di 2° grado

Abbiamo, ora, il caso del denominatore di 2° grado e numeratore di grado inferiore al 2°.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{dove} \quad Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

e $P(x)$ è un polinomio di grado 0 o 1.

Per semplicità, supponiamo che $Q(x)$ sia un polinomio "monico", cioè $a = 1$, e usiamo la notazione standard:

$$Q(x) = x^2 + px + q, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Sia Δ il discriminante del denominatore $Q(x)$.

Caso 1. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ t.c.

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Vali la scomposizione:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{x - x_2}$$

$$= A \log|x - x_1| + B \log|x - x_2| + c.$$

$$= H \log|x-x_1| + B \log|x-x_2| + C.$$

Esempio;

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx$$

$$Q(x) = x^2 - x - 2$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+1)(x-2).$$



$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{Ax + Bx - 2A + B}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)}$$

Per il principio di identità dei polinomi, deve essere:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1-A=3 \end{cases}$$

$$\underline{3A = -6}$$

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2} = \int \frac{-2}{x+1} + \int \frac{3}{x-2}$$

$$= -2 \log|x+1| + 3 \log|x-2| + C$$

$$= -2 \log|x+1| + 3 \log|x-2| + C$$

Caso: $\Delta = 0$

$$Q(x) = x^2 + px + q \quad \text{è un quadrato di binomio}$$

$$= (x - x_1)^2 \quad (\text{radici reali coincidenti})$$

$x_1 = x_2$

In questo caso, vale la scomposizione:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}, \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

$$= A \log|x - x_1| + B \int (x - x_1)^{-2} dx$$

$$= A \log|x - x_1| + B \frac{(x - x_1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= A \log|x - x_1| - \frac{B}{x - x_1} + C$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ m logaritmo e $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ una potenza

Es. $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} dx$

$$Q(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$= (x + 1)^2$$

$$\Delta = 0$$

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2} = \frac{\widehat{Ax} + \widehat{A+B}}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1} = \int \frac{1}{x+1} - \int \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \log|x+1| - \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

Con $\Delta < 0$. Partiamo dal caso in cui il numeratore
sia una costante (polinomio di grado 0),
ad es. num. = 1.

Es. $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$ $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

↖ si può scrivere come somma di quadrati

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4$$

$$= \underbrace{(x+1)^2} + \underbrace{4}$$

$$\int \frac{1}{\dots} = \int \frac{1}{\dots^2} \rightsquigarrow \text{e' analogo ad un integrale della forma}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \rightsquigarrow \text{è analogo all'integrale della forma}$$

$$\int \frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{4}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

In generale:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}$$

$$\Delta = p^2 - 4q < 0$$

$$\text{allora } x^2+px+q$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+px+q} = \int \frac{1}{\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4}\right)}_{\left(-\frac{\Delta}{4}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{\Delta}{4}}}\right) + c$$

$$\left(\int \frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + c \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c$$

Sempre con $\Delta < 0$, nel caso di numeratore di 1° grado, si procede con la decomposizione in somme:

Es. $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5} = \int \frac{1}{x^2+2x+5} - \int \frac{2x}{x^2+2x+5}$

$\uparrow$
 $\Delta < 0$

$\uparrow$
 è del tipo precedente

$\int \frac{2x}{x^2+2x+5} = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5} = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - 2 \int \frac{1}{x^2+2x+5}$

$\uparrow$
 aggiungo e sottraggo 2
 in modo da far comparire
 la derivata del denominatore

$\log(x^2+2x+5) + \dots + C$

$\uparrow$
 è del tipo
 precedente

- Caso del quoziente di polinomi in cui il numeratore ha grado maggiore o uguale al denominatore.

Insomma tutto si effettua la DIVISIONE DEI POLINOMI e poi ci si riconduce ai casi precedenti.

$\frac{\overbrace{P(x)}^{\text{grado } m}}{\underbrace{D(x)}_{\text{grado } n}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{grado } m-n} + \frac{\overbrace{R(x)}^{\text{resto}}}{\underbrace{D(x)}_{\text{grado } n}} \quad \text{grado } < n$

Es. $\int \frac{x^5+3x^2+1}{x^2+1} dx$

Facciamo la divisione dei polinomi:

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{x^5} + 3x^2 + 1 \quad \bigg| \quad \textcircled{x^2 + 1} \\
 -x^5 - x^3 \\
 \hline
 // \textcircled{-x^3} + 3x^2 + 1 \\
 +x^3 + x \\
 \hline
 // \textcircled{3x^2} + x + 1 \\
 -3x^2 - 3 \\
 \hline
 // \textcircled{x - 2}
 \end{array}$$

$Q(x)$

$R(x)$

$$\frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \overbrace{x^3 - x + 3}^{Q(x)} + \frac{\overbrace{x - 2}^{R(x)}}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \int x^3 - x + 3 + \int \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1} - 2 \int \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \text{" " " + } \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - 2 \arctan x + c.$$

$$\text{Es. } \int \frac{x^4 - 3x^2}{x + 1} dx$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{x^4} - 3x^2 \quad \bigg| \quad \textcircled{x + 1} \\
 -x^4 - x^3 \\
 \hline
 // \textcircled{-x^3} - 3x^2 \\
 +x^3 + x^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$x^3 - x^2 - 2x + 2$

$$\begin{array}{r} +x' + x' \\ \hline // \quad -2x^2 \\ 2x^2 + 2x \end{array}$$

$$// \quad 2x$$

$$\frac{-2x - 2}{//}$$

$$-2 = R(x)$$

$$\frac{x^4 - 3x^2}{x+1} = \overbrace{x^3 - x^2 - 2x + 2}^{Q(x)} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^4 - 3x^2}{x+1} = \int x^3 - x^2 - 2x + 2 - 2 \int \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x - 2 \log|x+1| + c$$

~~~~~

Più in generale, consideriamo il caso in cui  $P(x)$ ,  $Q(x)$  siano polinomi, con  $Q(x)$  polinomio di grado  $n$

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

$Q(x)$  ammette, nel campo Reale, un'unica decomposizione in fattori irriducibili della forma:

$$(x) \quad Q(x) = a_n (x - b_1)^{m_1} \dots (x - b_r)^{m_r} (x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \dots \dots (x^2 + c_k x + d_k)^{m_k}$$

dove  $b_i, i=1, \dots, l$  sono le radici reali di  $Q(x)$   
distinte di molteplicità  $m_i$

e i polinomi di 2° grado

$$x^2 + c_i x + d_i, \quad i=1, \dots, k$$

hanno  $\Delta < 0$  (sono irriducibili in  $\mathbb{R}$ ).

$$\left( x^2 + c_i x + d_i = (x - \lambda_i)(x - \bar{\lambda}_i), \quad \lambda_i, \bar{\lambda}_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \right)$$

di molteplicità  $m_i$  )

da cui:

$$n = m_1 + \dots + m_l + 2m_1 + \dots + 2m_k.$$

Teor. Siano  $P(x), Q(x)$  due polinomi in  $\mathbb{R}$   
con grado  $P(x)$  minore del grado di  $Q(x)$   
e sia (\*) la rappresentaz. di  $Q(x)$  in fattori  
irriducibili. Allora  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  può essere rappresentata  
nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - b_1} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x - b_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{l1}}{x - b_l} + \dots \\ & \dots + \frac{A_{lm_l}}{(x - b_l)^{m_l}} + \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + c_1x + d_1} + \dots + \\ & + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2 + c_1x + d_1)^{m_1}} + \dots + \frac{C_{km_k}x + D_{km_k}}{(x^2 + c_kx + d_k)^{m_k}}. \end{aligned}$$

$$(x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1}$$

$$(x^2 + c_k x + d_k)^{m_k}$$

Tale rappresentazione è unica, ed è detta decomposizione in fattori semplici.

Es.  $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A < 0}$

Cerchiamo  $A, B, C \in \mathbb{R}$  t.c.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

dai calcoli  
 $\rightsquigarrow$

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \int \frac{1}{x+1} - \int \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$= \log|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}$$

$$= \log|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$= \log|x+1| - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(Infatti  $\int \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$ )

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Per es. calcolare  $\int \frac{1}{x^2(1+x)} dx$

Il denominatore  $Q(x) = x^2(1+x)$  ha  $x=0$  radice reale  
 di molteplicità 2  
 e  $x=-1$  radice semplice reale

Allora vale la scomposizione:

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

dai calcoli

$$\leadsto A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2(1+x)} dx &= -\int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2} + \int \frac{1}{1+x} \\ &= -\log|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \log|1+x| + c. \\ &\quad // \\ &\quad -\frac{1}{x} \end{aligned}$$